الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين : الأدبي ، والفندقي والسياحي

إجابات أسئلة وتدريبات

الوحدة الرابعة :

التكامل وتطبيقاته

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

الفصل الأول : التكامل .

أولاً : التكامل غير المحدود :

تدريب ١ ، صفحة ١٦١ :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$$

$$\text{عندس} = -١ \text{ ، } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٤ - ١}{١ + ١} = \frac{-٥}{٢}$$

تدريب ٢ ، صفحة ١٦٣ :

١) $\text{س} + \text{ث}$

٢) $\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{ث}$

٣) $\frac{-١}{٤}\text{س}^{-٤} + \text{ث}$

٤) $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}} . \text{ءس} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{ث}$.

تدريب ٣ ، صفحة ١٦٤ :

١) $\int (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س}^{-\frac{١}{٢}})\text{ءس} = \frac{٣}{٣}\text{س}^{٣} - ٦\frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \text{س}^{٣} - ١٢\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$.

٢) $\frac{٤}{٢}\text{س}^{٢} - ٣ \times - \text{جتا}\underset{+\text{ث}}{\text{س}} = ٢\text{س}^{٢} + ٣\,\text{جتاس} + \text{ث}$

تدريب ٤ ، صفحة ١٦٥ :

١) $\int (٤\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} + ٩)\text{ءس} = \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + \text{ث}$.

٢) $\int (\text{س}^{٢} - ٥\text{س}) \times \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\text{ءس} = \int (\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - ٥\text{س}^{\frac{٢}{٣}})\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٨}\text{س}^{\frac{٨}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{ث}$.

$= \frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{\text{س}^{٨}} - ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{ث}$.

٣) $\int \frac{(\text{س}+٥)\cancel{(\text{س}-٣)}^{١}}{\cancel{\text{س}-٣}_{١}}\text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$.

٤) $\int \frac{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١٦)\cancel{(\text{س}+٤)}^{١}}{\cancel{\text{س}+٤}_{١}}\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١٦\text{س} + \text{ث}$.

تدريب ٥ ، صفحة ١٦٥ :

$\text{ق(س)} = \int (٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥)\text{ءس} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$ ،

لكن $\text{ق(٠)} = ٧ \Leftarrow ٠ - ٠ + ٥ + \text{ث} = ٧ \Leftarrow \text{ث} = ٧$

قاعدة الاقتران $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٧$.

* * *

- الأسئلة ، صفحة ١٦٦- ١٦٧

١- أ) $\frac{١}{٢} س + ح$

ب) $\int س^{-٥} . دس = \frac{-١}{٤} س^{-٤} + ح = \frac{-١}{٤س^{٤}} + ح$.

حـ) $٢س - \frac{١}{٣} س^{٣} + ح$.

د) $س^{٣} + ح$

هـ) $\int -٢س^{٥} \, دس = \frac{-٢}{٦} س^{٦} + ح = \frac{-١}{٣} س^{٦} + ح$.

٢- أ) $\int (١٠س^{٢} - س^{\frac{١}{٦}} + ٣ قا^{٢} س) \, دس = \frac{١٠}{٣} س^{٣} - \frac{٦}{٧} س^{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظا س + ح$

$= \frac{١٠}{٣} س^{٣} - \frac{٦}{٧} \sqrt[٦]{س^{٧}} + ٣ ظا س + ح$.

ب) $\int (٨س + ٢ - ٤س^{٢} - س) \, دس = \int (٧س + ٢ - ٤س^{٢}) \, دس$

$= \frac{٧}{٢} س^{٢} + ٢س - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ح$.

حـ) $\int ٣ \times \frac{جا س}{\underset{١}{\cancel{جتا س}}} \times \overset{١}{\cancel{جتا س}} \, دس = \int ٣ جا س \, دس$

$= -٣ جتا س + ح$.

د) $\int \frac{\overset{١}{\cancel{(س + ٢)}}(س + ٤)}{\underset{١}{\cancel{س + ٢}}} \, دس = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٤س + ح$.

٣- $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س + ١}{س}$

عند $س = ٥$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{٢٠ + ١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$.

٤- $ق(س) = \int ق'(س) \, دس$

$ق(س) = \int (٦س - ٨س^{٣} + ٥) \, دس$

$ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ح$

لكن $ق(-١) = ٢ \Rightarrow ٢ = ٣ - ٢ + -٥ + ح$

$٢ = -٤ + ح$

$ح = ٦$

$\therefore ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ٦$.

٥- $(\int ع(س) \, دس)' = (٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥)'$

$ع'(س) = ١٨س^{٢} - ٦س + ٦$

$ع'(١) = ١٨ - ٦ + ٦ = ١٨$.

٦- ه(س) = ∫ ه'(س) ءس = ∫ (٢س − ٥) ءس

ه(س) = س^{٢} − ٥س + ث

لكن ه(٢) = ٤ ⇐ ٤ = ٤ − ١٠ + ث

٤ = −٦ + ث

ث = ١٠

∴ ه(س) = س^{٢} − ٥س + ١٠

ه(١) = ١ − ٥ + ١٠ = ٦

٧- ه(س) = ∫ ه'(س) ءس = ∫ (٣س (٦ − ٥س) + ٤س^{٣}) ءس

ه(س) = ∫ (١٨س − ١٥س^{٢} + ٤س^{٣}) ءس

ه(س) = ٩س^{٢} − ٥س^{٣} + س^{٤} + ث .

لكن ه(٢) = −١ ⇐ −١ = ٩×٤ − ٥×٨ + ١٦ + ث

−١ = ٣٦ − ٤٠ + ١٦ + ث

−١ = ١٢ + ث

ث = −١٣

∴ ه(س) = ٩س^{٢} − ٥س^{٣} + س^{٤} + −١٣ .

ه(١) = ٩ − ٥ + ١ − ١٣ = −٨

٨- ه(س) = ∫ ه'(س) ءس = ∫ $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{س}^{٣}}{\text{س}}$ ءس

ه(س) = ∫ $\frac{\cancel{\text{س}}^{١}(\text{س} + ٦ + ٨\text{س}^{٢})}{\cancel{\text{س}}_{١}}$ ءس

ه(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} + ٦س + $\frac{٨}{٣}$س^{٣} + ث .

لكن ه(١) = ١٢ ⇐ ١٢ = $\frac{١}{٢}$ + ٦ + $\frac{٨}{٣}$ + ث

١٢ = $\frac{٣ + ٣٦ + ١٦}{٦}$ + ث

١٢ = $\frac{٥٥}{٦}$ + ث

ث = ١٢ − $\frac{٥٥}{٦}$ = $\frac{٧٢ − ٥٥}{٦}$ = $\frac{١٧}{٦}$

∴ ه(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} + ٦س + $\frac{٨}{٣}$س^{٣} + $\frac{١٧}{٦}$.

٩- ل(س) = ∫ ل'(س) ءس = ∫ (٦س^{٢} − ٦س^{٣} + −٢س) ءس

ل(س) = ٢س^{٣} − $\frac{\cancel{٦}^{٣}}{\cancel{٤}_{٢}}$س^{٤} − س^{٢} + ث

ل(٣) − ل(١) = (٥٤ − $\frac{٢٤٣}{٢}$ − ٩ + $\cancel{\text{ث}}$) − (٢ − $\frac{٣}{٢}$ − ١ + $\cancel{\text{ث}}$)

= ٤٤ − $\frac{٢٤٠}{٢}$ = ٤٤ − ١٢٠ = −٧٦

~ ، ~ ، ~

- ثانياً : التكامل المحدود :

- تدريب ١ ، ص١٦٩

١) $\int_{٤}^{١} ٦\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = \overset{٢}{\cancel{٦}} \times \frac{٢}{\underset{١}{\cancel{٣}}}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٤}^{١}$

$= ٤\sqrt{\text{س}^{٣}}\Big]_{٤}^{١} = ٤\sqrt{١} - ٤\sqrt{٦٤}$

$= ٤ - ٣٢ = -٢٨$

٢) $\int_{٠}^{١} ١٤\,\text{س}^{\frac{٤}{٣}}\,\text{دس} = \overset{٢}{\cancel{١٤}} \times \frac{٣}{\underset{١}{\cancel{٧}}}\,\text{س}^{\frac{٧}{٣}}\Big]_{٠}^{١}$

$= ٦\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}}\Big]_{٠}^{١} = ٦\sqrt[٣]{١} - ٦\sqrt[٣]{\text{صفر}}$

$= ٦$

- تدريب ٢ ، ص١٧٠ :

$\int_{-١}^{٢} ٤\,\text{ه}'(\text{س})\,\text{دس} = ٤\,\text{ه}(\text{س})\Big]_{-١}^{٢}$

$= ٤\,\text{ه}(٢) - ٤\,\text{ه}(-١)$

$= ٤ \times ٥ - ٤ \times ٣$

$= ٢٠ - ١٢ = ٨$

- تدريب ٣ ، ص١٧٠ :

$\int_{١}^{\text{ن}} ٦\,\text{س}\,\text{دس} = ٩ \Leftarrow ٣\,\text{س}^{٢}\Big]_{١}^{\text{ن}} = ٩$

$٣\,\text{ن}^{٢} - ٣ \times ١^{٢} = ٩$

$٣\,\text{ن}^{٢} = ٩ + ٣ = ١٢$

$\sqrt{\text{ن}^{٢}} = \sqrt{٤}$

$\text{ن} = ٢ ، -٢$

~ ، ~ ، ~

- الأسئلة ص ١٧١ :

١- أ) $\int_{١}^{٦} -٢\,\text{دس} = [-٢\text{س}]_{١}^{٦} = -١٢ - -٢ = -١٠$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{٨}\text{س}^{-\frac{١}{٣}}\,\text{دس} = [\frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}}]_{٨}^{١}$

$= \frac{٣}{١٦}[\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}]_{٨}^{١} = \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{١} - \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{٦٤}$

$= \frac{٣}{١٦} - \frac{٣\times٤}{١٦} = \frac{-٩}{١٦}$

جـ) $[(\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٤} - \text{س}^{٥} + ٧\text{س})]_{٠}^{٦} = ٦^{٢} - ٢\times٦^{٤} - ٦^{٥} + ٤٢ - \text{صفر}.$

د) $\int_{-٢}^{٢} (٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢)\,\text{دس} = [(\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س})]_{-٢}^{٢}$

$= (٨ + ٢ - ٤) - (-٨ + ٢ - -٤)$

$= ٦ \quad - -٢ = ٨.$

٢- $[٤\text{س}]_{-١}^{\text{م}} = ٢٠ \Leftarrow ٤\text{م} - ٤\times-١ = ٢٠$

$٤\text{م} = ١٦$

$\text{م} = ٤$

٣- $\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (٢\text{س}+١)\,\text{دس}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{س} + \text{ث}.$

$\text{د}(٥) - \text{د}(١) = (٢٥ + ٥ + \cancel{\text{ث}}) - (١ + ١ + \cancel{\text{ث}})$

$= ٣٠ - ٢ = ٢٨.$

٤- $\int_{٢}^{٢} (٤\text{س} - ٦\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{دس} = [(٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س})]_{٢}^{٢} = \text{صفر}.$

٥- أ) $\int_{١}^{٢} (١٢\text{س} - ٦\text{س}^{٣})\,\text{دس} = [(٦\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٤})]_{١}^{٢}$

$= (٢٤ - ٢٤) - (٦ - \frac{٣}{٢})$

$= ٠ - \frac{٩}{٢} = \frac{-٩}{٢}.$

ب) $\int_{١}^{-١} (٤س^٢ - ١٢س + ٩)\, ءس = \left[\frac{٤}{٣}س^٣ - ٦س^٢ + ٩س\right]_{١}^{-١}$

$= \left(-\frac{٤}{٣} - ٦ - ٩\right) - \left(\frac{٤}{٣} - ٦ + ٩\right)$

$= -\frac{٤}{٣} - ١٥ - \frac{٤}{٣} - ٣$

$= -\frac{٨}{٣} - ١٨ = \frac{-٨ - ٥٤}{٣} = -\frac{٦٢}{٣}$

د) $\int_{٠}^{-٢} \frac{(س - ١)(س + ٧)}{س - ١}\, ءس = \left[\frac{١}{٢}س^٢ + ٧س\right]_{٠}^{-٢}$

$= \left(\frac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{٢}_{١}} + -١٤\right) - (٠ + ٠)$

$= -١٢$

٦- $\int_{٥}^{٢} ق'(س)\, ءس = ١٣ \Leftarrow \left[ق(س)\right]_{٥}^{٢} = ١٣$

$ق(٢) - ق(٥) = ١٣$

$ق(٢) - -١٧ = ١٣$

$ق(٢) = ١٣ - ١٧$

$ق(٢) = -٤$

~ ، ~ ، ~

ثالثاً : خصائص التكامل المحدود :

تدريب ١، ص١٧٣ :

١) $\int_{-1}^{2} \frac{5}{2}\,\text{ع(س)}\,\text{ءس} = \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

٢) $2\int_{-1}^{2} \text{ل(س)}\,\text{ءس} = -2$ بالقسمة على ٢

$\int_{-1}^{2} \text{ل(س)}\,\text{ءس} = -1$

∴ $\int_{-1}^{2} \left(2\,\text{ع(س)} - 3\,\text{ل(س)} - 2\text{س}\right)\text{ءس} = 2\int_{-1}^{2} \text{ع(س)}\,\text{ءس} - 3\int_{-1}^{2} \text{ل(س)}\,\text{ءس} - \int_{-1}^{2} 2\text{س}\,\text{ءس}$

$= 2\int_{-1}^{2} \text{ع(س)}\,\text{ءس} - 3\int_{-1}^{2} \text{ل(س)}\,\text{ءس} - \left([\text{س}^2]_{-1}^{2}\right)$

$= 2 \times 5 - 3 \times -1 - (4 - 1)$

$= 10 + 3 - 3 = 10$

تدريب ٢، ص١٧٤ :

$2\int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 2 \Rightarrow \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 1$

١) $\int_{5}^{1} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = -\int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = -1$

٢) $\int_{5}^{6} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \int_{5}^{1} \text{ق(س)}\,\text{ءس} + \int_{1}^{6} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

$= -1 + 4 = 3$

٣) $\int_{6}^{6} \text{ق(س)}\,\text{ءس} =$ صفراً .

تدريب ٢، ص١٧٥ :

$\int_{-1}^{2} \frac{\text{ق(س)}}{3}\,\text{ءس} = 5 \Rightarrow \int_{-1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 15$.

١) $2\int_{2}^{-1} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = 2 \times -15 = -30$

٢) $\int_{٦}^{٢} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \int_{٦}^{-١} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} + \int_{-١}^{٢} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

$= \quad -٤ \quad + \quad ١٥ \quad = ١١$

تدريب ٣ ، ص ١٧٥ :

$\int_{٢}^{٥} (٣\,\text{ه}(\text{س}) - ٤)\,\text{ء}\text{س} = ١٨ \Leftarrow ٣\int_{٢}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} - \int_{٢}^{٥} ٤\,\text{ء}\text{س} = ١٨$

$٣\int_{٢}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} - \left[(٤\text{س})\right]_{٢}^{٥} = ١٨$

$٣\int_{٢}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} - (٢٠ - ٨) = ١٨$

$٣\int_{٢}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \quad = ١٨ + ١٢ = ٣٠$

$\int_{٢}^{٥} \text{ه}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \quad = ١٠$

تدريب ٤ ، ص ١٧٦ :

١) $\text{م}^{٣} + ١ = -٧ \Leftarrow \text{م}^{٣} = -٨$

$\sqrt[٣]{\text{م}^{٣}} = \sqrt[٣]{-٨}$

$\text{م} = -٢$

٢) $\left[(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\right]_{\text{ن}}^{١} = ٠ \Leftarrow (١ - ٣) - (\text{ن}^{٢} - ٣\text{ن}) = ٠$

$-٢ - \text{ن}^{٢} + ٣\text{ن} = ٠$

$\text{ن}^{٢} - ٣\text{ن} + ٢ = ٠$

$(\text{ن} - ٢)(\text{ن} - ١) = ٠$

إما $\text{ن} = ٢$ ، وإما $\text{ن} = ١$

* * *

الأسئلة ص ١٧٧ :

١- $\int_{١}^{٤} ٢\,\text{د}(\text{س})\,\text{ء س} = ١٢ \Leftarrow \int_{١}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س} = ٦$

أ) $٣\int_{٤}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س} = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $\int_{٥}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س} = \int_{٥}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س} + \int_{٤}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س}$

$= -٤ + -٦ = -١٠$

جـ) $\int_{٥}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{ء س} + \int_{٥}^{٤} ٢\text{س}\,\text{ء س} = -٤ + \left(\left[\text{س}^٢\right]_{٥}^{٤}\right)$

$= -٤ + (١٦ - ٢٥)$

$= -٤ + -٩ = -١٣$

٢- $\int_{-١}^{٢} \frac{\text{ل}(\text{س})}{٢}\,\text{ء س} = ٣ \Leftarrow \int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{ء س} = ٦$.

أ) $\int_{٢}^{-١} (\text{هـ}(\text{س}) + ١)\,\text{ء س} = ٥ \Leftarrow \int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء س} + \int_{٢}^{-١} ١\,\text{ء س} = ٥$

$\int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء س} + \left(\left[\text{س}\right]_{٢}^{-١}\right) = ٥$

$\int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء س} + (-١ - ٢) = ٥ \Leftarrow \int_{٢}^{-١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء س} = ٥ + ٣ = ٨$

ب) $٣\int_{-١}^{٢} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ء س} - \int_{-١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{ء س} + ٣\int_{-١}^{٢} \text{ل}(\text{س})\,\text{ء س}$

$= ٣ \times -٨ - \left(\left[\text{س}^٢\right]_{-١}^{٢}\right) + ٣ \times ٦$

$= -٢٤ - (٤ - ١) + ١٨ = -٩$

٣- $٥\text{أ} + ٧ = \text{أ} - ١ \Leftarrow ٤\text{أ} = -٨ \Leftarrow \text{أ} = -٢$.

٤- $(٢س - ٢س^{٢})\Big]_{٣}^{م} = ٠$

$(٢م - ٢م^{٢}) - (٦ - ١٨) = ٠ \Rightarrow ٢م - ٢م^{٢} + ١٢ = ٠$ ، بالقسمة على -٢

$م^{٢} - م - ٦ = ٠$

$(م - ٣)(م + ٢) = ٠$

إما م = ٣ ، وإما م =٢

٥- $٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - \int_{٤}^{١} ٥\,دس = ٩ \Rightarrow ٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - (٥س\Big]_{٤}^{١}) = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس - (٥ - ٢٠) = ٩$

$٣\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس = ٩ + -١٥ = -٦$

$\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس = -٢ \Rightarrow \int_{١}^{٤} ق(س)\,دس = ٢$

المطلوب : $\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\,دس = ٢\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٤} ١\,دس$

$= ٢ \times ٢ + (س\Big]_{١}^{٤})$

$= ٤ + (٤ - ١) = ٧$.

٦- $(س^{٢} - س)\Big]^{ل} = ٦$

$(ل^{٢} - ل) - (٠ - ٠) = ٦$

$ل^{٢} - ل - ٦ = ٠$

$(ل - ٣)(ل + ٢) = ٠$

إما ل = ٣ وإما ل = -٢ .

~ . ~ . ~

ثالثا : التكامل بالتعويض :

تدريب ١ ، ص١٧٩

$$\int ٢١\,(٣\text{س}^{٢}+٤\text{س})(\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢})^{٧}\,\text{د س}$$

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}$$

$$\text{دص} = (٣\text{س}^{٢}+٤\text{س})\,\text{د س}$$

$$= \int ٢١\,(٣\text{س}^{٢}+٤\text{س})\,\text{ص}^{٧}\,\text{د س} = \int ٢١ \times \text{ص}^{٧}\,.\,\text{دص}$$

$$= \frac{٢١}{٨}\text{ص}^{٨} + \text{ه}$$

$$= \frac{٢١}{٨}(\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢})^{٨} + \text{ه}\ .$$

تدريب ٢ ، ص١٨٢ :

نفرض أن $\text{ص} = ٥\text{س} + ١$

عند $\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ١$

عند $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = ١٦$ ، وبإجراء التكامل :

وحسب حل المثال ٢ ص١٨١

$$\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥\text{س}+١}}\,\text{د س} = \int_{١٦}^{١} \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{١}{٥}\,\text{دص}$$

$$= \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{ص}}\Big]_{١٦}^{١}$$

$$= \frac{٢}{٥}\sqrt{١} - \frac{٢}{٥}\sqrt{١٦}$$

$$= \frac{٢}{٥} - \frac{٨}{٥} = \frac{-٦}{٥}$$

تدريب ٣ ، ص١٨٢

١) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\Leftarrow \text{دص} = ٢\text{س}\,\text{د س}$

$$\int ٣\text{س}\,(\text{س}^{٢}+١)^{-٥}\,\text{د س} = \int ٣\,\text{ص}^{-٥} \times \frac{\text{دص}}{٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{ه}$$

$$= \frac{-٣}{٨}(\text{س}^{٢}+١)^{-٤} + \text{ه}\ .$$

٢) نفرض أن $\text{ص} = ١ - \text{س}^٢$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س}$$

$$\text{دص} = -٢\text{س}\ \text{دس}$$

$$\int ٢\text{س}\ \text{قا}^٢(١-\text{س}^٢)\ \text{دس} = \int -\text{قا}^٢\text{ص} \times \text{دص}$$

$$= -\text{طا ص} + \text{هـ}$$

$$= -\text{طا}\ (١-\text{س}^٢) + \text{هـ}\ .$$

٣) نفرض أن $\text{ص} = \text{س} - ٢\text{س}^٢ - ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - ٤\text{س}$$

$$\text{دص} = (١ - ٤\text{س})\ \text{دس}$$

عند $\text{س} = -١$ ، $\text{ص} = -٤$

عند $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = -٢$

$$\int_{١}^{-١} (٤\text{س} - ١)(\text{س} - ٢\text{س}^٢ - ١)^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس} = \int_{١}^{-١} -(١ - ٤\text{س})(\text{س} - ٢\text{س}^٢ - ١)^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$$

$$= \int_{-٢}^{-٤} -\text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{دص} = \frac{-٣}{٤}\ \text{ص}^{\frac{٤}{٣}} \Big]_{-٢}^{-٤}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\sqrt[٣]{(-٤)^٤} - \frac{-٣}{٤}\sqrt[٣]{(-٢)^٤}$$

$$= \frac{-٣\sqrt[٣]{٢٥٦} + ٣\sqrt[٣]{١٦}}{٤} = \frac{-٣ \times ٤\sqrt[٣]{٤} + ٣ \times ٢\sqrt[٣]{٢}}{٤}$$

$$= \frac{-٦\sqrt[٣]{٤} + ٣\sqrt[٣]{٢}}{٢}$$

٤) $\int_{٠}^{٣} (\text{س}+١)^{\frac{-١}{٥}}\ \text{دس}$ ، نفرض أن $\text{ص} = \text{س} + ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$$

$$\text{دص} = \text{دس}$$

$$\int_{٠}^{٣} (\text{س}+١)^{\frac{-١}{٥}}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{\frac{-١}{٥}} .\ \text{دص}$$

$$= \frac{٥}{٤}\ \text{ص}^{\frac{٤}{٥}} + \text{هـ}$$

$$= \frac{٥}{٤}\sqrt[٥]{(\text{س}+١)^٤} + \text{هـ}$$

$$\int_{٠}^{٣} (\text{س}+١)^{\frac{-١}{٥}}\ \text{دس} = \frac{٥}{٤}\sqrt[٥]{(\text{س}+١)^٤}\ \Big]_{٠}^{٣} = \frac{٥}{٤}\sqrt[٥]{٤^٤} - \frac{٥}{٤}\sqrt[٥]{١^٤}$$

$$= \frac{٥}{٤}\left(\sqrt[٥]{٢٥٦} - ١\right) .$$

* * *

تدريب ٤ ، ص١٨٢

١) نفرض أن $\text{ص} = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$$

$$\text{دص} = \text{أ} . \text{دس}$$

$$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \,\text{دس} = \int (\text{ص})^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{1}{\text{أ}} \times \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{هـ}$$

$$= \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{هـ} \text{ ، } \text{أ} \neq 0 \text{ ، } \text{ن} \neq -1 .$$

٢) نفرض أن $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

$$\text{أ} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{دص} = \text{أ} . \text{دس}$$

$$\int \text{جتا}\,(\text{أس} + \text{ب})\,\text{دس} = \int \text{جتا ص} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}} \times \text{جا ص} + \text{هـ}$$

$$= \frac{\text{جا}\,(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{هـ} \text{ ، } \text{أ} \neq 0 .$$

تدريب ٥ ، ص١٨٣ :

١) $\overset{1}{\cancel{6}} \left[\frac{(1 - 2\text{س})^{6}}{\underset{1}{\cancel{6}} \times -2} \right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}(1 - 4)^{6} - -\frac{1}{2}(1 + 2)^{6}$

$$= -\frac{1}{2}(-3)^{6} + \frac{1}{2}(3)^{6} = \text{صفراً} .$$

٢) $\int 12\,\text{جا}\,(1 - 4\text{س})\,\text{دس} = 12 \times \frac{-\text{جتا}\,(1 - 4\text{س})}{-4} + \text{هـ}$

$$= +3\,\text{جتا}\,(1 - 4\text{س}) + \text{هـ} .$$

* * *

الأسئلة ، ص١٨٤ :

١- أ) ص = س − س^{٢}

ب) ص = ٢س^{٣} − ٢

جـ) ص = س^{٣} − س^{٢} .

د) ص = س^{٢} − ٦س .

٢- أ) $\int (\text{٣س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}\,\text{ءس} = \dfrac{(\text{٣س} - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\cancel{٣} \times \frac{٥}{\cancel{٣}}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٥}\sqrt[٣]{(\text{٣س} - ٢)^{٥}} + \text{جـ}$.

ب) نفرض أن ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س} - ٤$

ءص = ٤ (س − ١) ءس .

$\int (\text{س} - ١)(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٥}\,\text{ءس} = \int \text{ص}^{٥} \times \dfrac{\text{ءص}}{٤}$

$= \frac{١}{٤} \times \dfrac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢٤}(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٦} + \text{جـ}$.

جـ) $\int ٢\,\text{قا}^{٢}(٢ - \text{س})\,\text{ءس} = ٢ \times \dfrac{\text{ظا}(٢ - \text{س})}{-١} + \text{جـ}$

$= -٢\,\text{ظا}(٢ - \text{س}) + \text{جـ}$.

د) نفرض أن ص = س^{٤} + ١

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{٣}$

ءص = ٤س^{٣} . ءس

$\int \text{٢س}^{٣}\,\text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\,\text{ءس} = \int \text{جا ص} \times \dfrac{\text{ءص}}{٢}$

$= \frac{-١}{٢}\,\text{جتا ص} + \text{جـ} = \frac{-١}{٢}\,\text{جتا}(\text{س}^{٤} + ١) + \text{جـ}$.

٣- أ) $\int_{٠}^{٢} (٤س+١)^{\frac{١}{٢}} \, دس = \left[\frac{(٤س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{\cancel{٢}} \times \cancel{٤}^{٢}} \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤س+١)^{٣}} \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٦}\sqrt{٩^{٣}} - \frac{١}{٦}\sqrt{١} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{١}{٦}$

$= \frac{٢٦}{٦}$

$= \frac{١٣}{٣}$.

ب) $\int_{-١}^{-١} ٣س^{٢} (س^{٣} - ١)^{٣} \, دس =$ صفراً .

ج) $\int_{١}^{٠} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١} \, دس$

نفرض أن $ص = س^{٢} - ١$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دص = ٢س . دس$

عند $س = ٠$ ، $ص = -١$

عند $س = ١$ ، $ص = ٠$

$\int_{١}^{٠} ٢س (س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٣}} \, دس = \int_{٠}^{-١} ص^{\frac{١}{٣}} \times دص$

$= \left[\frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} \right]_{٠}^{-١} = \frac{٣}{٤} \left[\sqrt[٣]{ص^{٤}} \right]_{٠}^{-١}$

$= \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{١} - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{صفر}$

$= \frac{٣}{٤}$.

د) نفرض أن $ص = س^{٢} - ٣س$

$\frac{دص}{دس} = ٢س - ٣$

$دص = (٢س - ٣) \, دس$.

$\int$ (٣ − ٢س)(س^{٢} − ٣س)$^{-٢}$ دس = $\int$ ص$^{-٢}$ × − دص

= − ص$^{-١}$ / −١ + ـه = ١ / (س^{٢} − ٣س) + ـه .

$\int_{١}^{٢}$ (٣ − ٢س)(س^{٢} − ٣س)$^{-٢}$ دس = [١ / (س^{٢} − ٣س)]$_{١}^{٢}$

= ١ / (٤ − ٦) − ١ / (١ − ٣)

= −١/٢ − −١/٢ = صفراً .

٤- $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ(س^{٣}) دس : نفرض أن ص = س^{٣}

دص / دس = ٣س^{٢}

دص = ٣س^{٢} دس .

عند س = ٣ ، ص = ٢٧

عند س = −٢ ، ص = −٨

$\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ(س^{٣}) دس = $\int_{-٨}^{٢٧}$ قَ(ص) . دص = [ق(ص)]$_{-٨}^{٢٧}$

= ق(٢٧) − ق(−٨) = −٦ − ٥ = −١١ .

٥- $\int_{-١}^{٢}$ ٨س ق(س^{٢} + ١) دس : نفرض أن ص = س^{٢} + ١

دص / دس = ٢س

دص = ٢س دس .

عند س = ٢ ، ص = ٥

عند س = −١ ، ص = ٢

$\int_{-١}^{٢}$ ٨س ق(س^{٢} + ١) دس = $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص) × ٤ . دص

= ٤ $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص) دص

= ٤ × −٣ = −١٢

٦- $\int_{٠}^{٤} ٢س\,(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,دس$

نفرض أن ص = $س^{٢}+٩$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دص = ٢س\,.\,دس$

$$\int ٢س\,(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,دس = \int ص^{\frac{١}{٢}} \times دص$$

$$= \frac{٢}{٣}\,ص^{\frac{٣}{٢}} + هـ$$

$$= \frac{٢}{٣}\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}} + هـ \,.$$

$$\int_{٠}^{٤} ٢س\,(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,دس = \left[\frac{٢}{٣}\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \frac{٢}{٣}\sqrt{(٢٥)^{٣}} - \frac{٢}{٣}\sqrt{(٩)^{٣}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ١٢٥ - \frac{٢}{٣} \times ٢٧$$

$$= \frac{٢٥٠ - ٥٤}{٣} = \frac{١٩٦}{٣}$$

~ . ~ . ~

الفصل الثاني : تطبيقات التكامل .

أولاً : تطبيقات هندسية :

تدريب ١ ص١٨٦

$$دَ(س) = ٢س - ١$$

$$د(س) = \int دَ(س) . ءس = \int (٢س - ١)\, ءس$$

$$د(س) = س^{٢} - س + ث .$$

$$(-١ ، ٢) \Leftarrow س = -١ ، ص = د(-١) = ٢$$

$$٢ = ١ - -١ + ث \Leftarrow ث = ٠$$

$$\therefore د(س) = س^{٢} - س .$$

تدريب ٢ ص١٨٧ :

$$د(س) = \int دَ(س) . ءس = \int ٦ (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} ءس$$

$$د(س) = \overset{٣}{\cancel{٦}} \times \frac{(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{١ \times \cancel{٢} \times \frac{٤}{٣}} + ث$$

$$د(س) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}} + ث .$$

$$(٠ ، ٥) \Leftarrow د(٠) = ٥ \Leftarrow ٥ = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{١} + ث$$

$$ث = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$$

$$\therefore د(س) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}} + \frac{١١}{٤} .$$

$$د(١٤) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢٧)^{٤}} + \frac{١١}{٤}$$

$$د(١٤) = \frac{٩ \times ٨١ + ١١}{٤} = \frac{٧٢٩ + ١١}{٤} = \frac{٧٤٠}{٤}$$

$$د(١٤) = ١٨٥$$

~ ، ~ ، ~

الأسئلة ، ص١٨٨

١- $ق َ(س) = ٦ - ٢س + ٩س^{٣}$.

$ق(س) = \int ق َ(س) \, دس = \int (٦ - ٢س + ٩س^{٣}) \, دس$

$ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + جـ$.

لكن $ق(٠) = ٥ \Leftarrow ٥ = ٠ - ٠ + ٠ + جـ$

$جـ = ٥$

$\therefore ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٢} + ٥$

٢- $ق َ(س) = ٢س \, (س^{٢} + ٨)^{-\frac{١}{٣}}$

$ق(س) = \int ق َ(س) \, دس = \int ٢س \, (س^{٢} + ٨)^{-\frac{١}{٣}} \, دس$.

نفرض أن $ص = س^{٢} + ٨$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دص = ٢س \, دس$

$ق(س) = \int ص^{-\frac{١}{٣}} \times دص = \frac{٣}{٢} ص^{\frac{٢}{٣}} + جـ$.

$ق(س) = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}} + جـ$.

$(٠ ، ٤) \Leftarrow ق(٠) = ٤ \Leftarrow ٤ = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{٨^{٢}} + جـ$

$٤ = \frac{٣}{\cancel{٢}} \times \cancel{٤}^{٢} + جـ$

$جـ = -٢$

$\therefore ق(س) = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}} - ٢$.

٣- $ق َ(س) = ٢٥ \, (٥س + ٤)^{٤}$

$ق(س) = \int ق َ(س) \, . \, دس = \int ٢٥ \, (٥س + ٤)^{٤} \, دس$

$ق(س) = \overset{١}{\cancel{٢٥}} \times \frac{(٥س + ٤)^{٥}}{\underset{١}{\cancel{٥ \times ٥}}} + جـ$

$(-١ ، ٧) \Leftarrow ق(-١) = ٧ \Leftarrow ٧ = (-٥ + ٤)^{٥} + جـ$

$٧ = -١ + جـ$

$جـ = ٨$

$\therefore ق(س) = (٥س + ٤)^{٥} + ٨ \Leftarrow ق(١) = (٩)^{٥} + ٨$

٤- $\bar{د}(س) = ٨س - ٦س^{٢}$

$د(س) = \int \bar{د}(س)\, ءس = \int (٨س - ٦س^{٢})\, ءس$

$د(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + \Delta$

$(٠ ، ٣) \Leftarrow د(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ٠ - ٠ + \Delta$

$\Delta = ٣$

$\therefore د(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$

٥- $\bar{ه}(س) = \frac{\overset{١}{\cancel{س}}(٢س - ٥)}{\underset{١}{\cancel{س}}} = ٢س - ٥ \quad ، س \neq ٠ .$

$ه(س) = \int \bar{ه}(س) . ءس = \int (٢س - ٥)\, ءس$

$ه(س) = س^{٢} - ٥س + \Delta .$

$(-١ ، ٥) \Leftarrow ه(-١) = ٥ \Leftarrow ٥ = ١ + ٥ + \Delta$

$\Delta = -١$

$\therefore ه(س) = س^{٢} - ٥س - ١$

$ه(٢) = ٤ - ١٠ - ١ = -٧$

~ ، ~ ، ~

ثانياً : تطبيقات فيزيائية .

تدريب ١ ، ص ١٩٠ :

١) ع(ن) = فَ(ن) = ٢ن − ٥

ف(ن) = ∫ ع(ن) . د ن = ∫ (٢ن − ٥) د ن

ف(ن) = ن^{٢} − ٥ن + ث .

لكن ف(٠) = ٣ ⟸ ٣ = ٠ − ٠ + ث

ث = ٣

∴ ف(ن) = ن^{٢} − ٥ن + ٣

ف(٢) = ٤ − ١٠ + ٣ = −٣   يكون موقع الجسم بعد ثانيتين .

٢) ع(ن) = فَ(ن) = ٦ (١ − ٢ن)^{٢}

ف(ن) = ∫ ع(ن) . د ن = ∫ ٦ (١ − ٢ن)^{٢} د ن

ف(ن) = ٦ $\frac{(١ - ٢ن)^{٣}}{-٢ \times ٣}$ + ث

ف(ن) = − (١ − ٢ن)^{٣} + ث .

لكن ف(٠) = ٥ ⟸ ٥ = − (١ − ٠)^{٣} + ث

٥ = −١ + ث

ث = ٦

∴ ف(ن) = − (١ − ٢ن)^{٣} + ٦

ف(١) = − (١ − ٢)^{٣} + ٦

ف(١) = − −١ + ٦ = ٧ م .

تدريب ٢ ، ص ١٩١ :

١) ت(ن) = عَ(ن) = −١٢

ع(ن) = ∫ عَ(ن) . د ن = ∫ −١٢ . د ن

ع(ن) = −١٢ ن + ث$_{١}$.

لكن ع(٠) = ٥ ⟸ ٥ = ٠ + ث$_{١}$

ث$_{١}$ = ٥

∴ ع(ن) = −١٢ ن + ٥

ع(٤) = −١٢ × ٤ + ٥ = −٤٣ م/ث .

٢) ع(ن) = فً(ن) = -١٢ن + ٥

فَ(ن) = ∫ فً(ن) . دن = ∫ ع(ن) . دن

فَ(ن) = ∫ (-١٢ن + ٥) دن

فَ(ن) = -٦ن^{٢} + ٥ن + ث$_{٢}$

لكن فَ(٠) = ٣ ⇐ ٣ = ٠ + ٠ + ث$_{٢}$

ث$_{٢}$ = ٣

∴ فَ(ن) = -٦ن^{٢} + ٥ن + ٣ .

فَ(٣) = -٥٤ + ١٥ + ٣ = -٣٦

~ . ~ . ~

الأسئلة ، ص١٩٢

١- ع(ن) = ف'(ن) = ١٢ جتا (٢ن −١)

ف(ن) = ∫ ع(ن) . ءن = ∫ ١٢ جتا (٢ن −١) ءن

ف(ن) = ١٢ × $\frac{\text{جا}(٢ن-١)}{٢}$ + هـ

ف(ن) = ٦ جا (٢ن −١) + هـ ، حيث هـ ثابت .

٢- ف(ن) = ∫ ع(ن) . ءن = ∫ (٤ن + ٨) . ءن

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + هـ .

لكن ف(٠) = ٢ ⟸ ٢ = هـ

∴ ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢

ف(٤) = ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦م .

٣- ١) ع(ن) = ∫ ت(ن) . ءن = ∫ ٤٨ (١−٢ن)^{٣} ءن

ع(ن) = ٤٨ × $\frac{(١-٢ن)^{٤}}{٤\times -٢}$ + هـ١

ع(ن) = −٦ (١−٢ن)^{٤} + هـ١

ع(٠) = ٢ ⟸ ٢ = −٦ (١) + هـ١ ⟸ هـ١ = ٨

∴ ع(ن) = −٦ (١−٢ن)^{٤} + ٨ ⟸ ع(١) = −٦ (−١)^{٤} + ٨

ع(١) = ٢ م/ث .

٢) ف(ن) = ∫ ع(ن) . ءن = ∫(−٦ (١−٢ن)^{٤} + ٨) ءن

ف(ن) = $\frac{\cancel{-٦}\,٣\,(١-٢ن)^{٥}}{٥\times\cancel{-٢}\,١}$ + ٨ن + هـ٢

ف(٠) = ٣ ⟸ ٣ = $\frac{٣}{٥}$ (١)^{٥} + ٠ + هـ٢

٣ = $\frac{٣}{٥}$ + هـ٢ ⟸ هـ٢ = ٣ − $\frac{٣}{٥}$

هـ٢ = $\frac{١٢}{٥}$

∴ ف(ن) = $\frac{٣}{٥}$ (١−٢ن)^{٥} + ٨ن + $\frac{١٢}{٥}$.

ف(٢) = ($\frac{٣}{٥}$ (−٣)^{٥} + ١٦ + $\frac{١٢}{٥}$) م .

٤ـ ع(ن) = (٣ن − ١) (٤ن + ١)
ع(ن) = ١٢ن^{٢} − ن − ١
١) ف(ن) = ∫ ع(ن) . ءن = ∫ (١٢ن^{٢} − ن − ١) ءن
ف(ن) = (٤ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ن^{٢} − ن + ﻫ) م ، حيث ﻫ ثابت .

٢) ف(٠) = ٧ ⟸ ﻫ = ٧
∴ ف(ن) = ٤ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ن^{٢} − ن + ٧ .
ف(٢) = ٣٢ − ٢ − ٢ + ٧
ف(٢) = ٣٥ م .

~ ، ~ ، ~

ثانياً : المساحة .

تدريب ١ ، ص١٩٨

١) ١٢ − ٤س = ٠ ⟸ ١٢ = ٤س ⟸ س = ٣ ∉ [١، ٢]

$$\int_{١}^{٢} (١٢ - ٤\text{س})\,\text{دس} = \left[(١٢\text{س} - ٢\text{س}^{٢})\right]_{١}^{٢}$$

$$= (٢٤ - ٨) - (١٢ - ٢)$$

$$= ١٦ - ١٠ = ٦$$

المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٢} |\text{ق}(\text{س})| \,.\, \text{دس}$ = ٦ وحدات مربعة .

٢) ٣س^٢ − ١٢س = ٠ ⟸ ٣س (س − ٤) = ٠

س = ٠ ∈ [٠، ٢]

س = ٤ ∉ [٠، ٢]

$$\int_{٠}^{٢} (٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س})\,\text{دس} = \left[(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢})\right]_{٠}^{٢}$$

$$= (٨ - ٢٤) - (٠)$$

$$= -١٦$$

المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٢} |\text{ق}(\text{س})| \,.\, \text{دس}$ = ١٦ وحدة مربعة .

٣) ٦ − ٢س = ٠ ⟸ ٦ = ٢س ⟸ س = ٣ ∈ [١، ٤]

$$\int_{١}^{٣} (٦ - ٢\text{س})\,\text{دس} = \left[(٦\text{س} - \text{س}^{٢})\right]_{١}^{٣}$$

$$= (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$$

$$= ٩ - ٥ = ٤$$

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢\text{س})\,\text{دس} = \left[(٦\text{س} - \text{س}^{٢})\right]_{٣}^{٤}$$

$$= (٢٤ - ١٦) - (١٨ - ٩)$$

$$= ٨ - ٩ = -١$$

المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٤} |\text{ق}(\text{س})|\,\text{دس} = \int_{١}^{٣} |\text{ق}(\text{س})|\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} |\text{ق}(\text{س})|\,\text{دس}$

= ٤ + ١ = ٥ وحدات مربعة .

- تدريب ٢، ص١٩٨ :

$س^٢ - ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ ، س = -١$

$$\int_{-١}^{٣} (س^٢ - ٢س - ٣)\, ءس = \left[\left(\frac{س^٣}{٣} - س^٢ - ٣س\right)\right]_{-١}^{٣}$$

$$= (\cancel{٩} - \cancel{٩} - ٩) - \left(\frac{-١}{٣} - ١ + ٣\right)$$

$$= -٩ + \frac{١}{٣} + ١ - ٣$$

$$= -١١ + \frac{١}{٣} = \frac{-٣٣ + ١}{٣}$$

$$= \frac{-٣٢}{٣} .$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٣} |د(س)|\, ءس = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة .

- تدريب ٣ ، ص١٩٩ :

١) $\int_{أ}^{ب} د(س) \,.\, ءس = -م_١ = -٨$ ، لأن المساحة $م_١$ تقع تحت محور السينات

٢) $\int_{ب}^{ج} د(س)\, ءس = م_٢ = ٥$ ، لأن المساحة $م_٢$ تقع فوق محور السينات .

٣) $\int_{أ}^{ج} د(س) \,.\, ءس = \int_{أ}^{ب} د(س) \,.\, ءس + \int_{ب}^{ج} د(س) \,.\, ءس$

$= -٨ + ٥ = -٣ .$

٤) $م_١ + م_٢ = \int_{أ}^{ب} |د(س)|\, ءس + \int_{ب}^{ج} |د(س)|\, ءس$

$= ٨ + ٥ = ١٣$ وحدة مربعة .

~ ، ~ ، ~

الأسئلة، ص ٢١١ :

١- أ) $\int_{-١}^{٢} ١٢ \,\text{ءس} = \left[١٢\text{س}\right]_{-١}^{٢}$

$= ١٢ \times ٢ - ١٢ \times -١ = ٣٦$

المساحة المطلوبة = $\int_{-١}^{٢} |\text{ه(س)}| \,\text{ءس} = ٣٦$ وحدة مربعة .

ب) $٥ - ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow ٥ = ٢\text{س}$

$\text{س} = \frac{٥}{٢} \in [-٢ ، ٢]$

$\int_{-٢}^{\frac{٥}{٢}} (٥ - ٢\text{س}) \,\text{ءس} = \left[(٥\text{س} - \text{س}^٢)\right]_{-٢}^{\frac{٥}{٢}}$

$= \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right) - (-١٠ - ٤)$

$= \frac{٢٥}{٤} + ١٤ = \frac{٨١}{٤}$

$\int_{\frac{٥}{٢}}^{٢} (٥ - ٢\text{س}) \,\text{ءس} = \left[(٥\text{س} - \text{س}^٢)\right]_{\frac{٥}{٢}}^{٢}$

$= (١٠ - ٤) - \left(\frac{٢٥}{٢} - \frac{٢٥}{٤}\right)$

$= ٦ - \frac{٢٥}{٤} = \frac{-١}{٤}$.

المساحة المطلوبة = $\int_{-٢}^{٢} |\text{ه(س)}| \,\text{ءس}$

$= \frac{٨١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٨٢}{٤} = \frac{٤١}{٢}$ وحدة مربعة .

جـ) $٣\text{س}^٢ - ٣ = ٠ \Leftarrow ٣\text{س}^٢ = ٣ \Leftarrow \text{س}^٢ = ١$

$\Leftarrow \text{س} = ١ ، -١ \notin [-٤ ، -٢]$.

$\int_{-٤}^{-٢} (٣\text{س}^٢ - ٣) \,\text{ءس} = \left[(\text{س}^٣ - ٣\text{س})\right]_{-٤}^{-٢}$

$= (-٨ + ٦) - (-٦٤ + ١٢)$

$= -٢ + ٥٢ = ٥٠$

المساحة المطلوبة = $\int_{-٤}^{-٢} |\text{ه(س)}| \,\text{ءس} = ٥٠$ وحدة مربعة .

٢- أ) $٦ - ٦س^{٢} = ٠ \Leftarrow ٦ = ٦س^{٢} \Leftarrow س^{٢} = ١$

$\Leftarrow س = -١ ، ١$

$-١ \in [-٢، ٠] ، ١ \notin [-٢، ٠]$

$\int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦س^{٢})\, ءس = \Big[(٦س - ٢س^{٣})\Big]_{-٢}^{-١}$

$= (-٦+٢) - (-١٢+١٦)$

$= -٤ - ٤ = -٨$

$\int_{-١}^{٠} (٦ - ٦س^{٢})\, ءس = \Big[(٦س - ٢س^{٣})\Big]_{-١}^{٠}$

$= (٠) - (-٦+٢)$

$= ٠ - -٤ = ٤$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٢}^{٠} |ق(س)|\, ءس = ٨ + ٤ = ١٢$ وحدة مربعة .

ب) $٤س^{٣} = ٠ \Leftarrow س = ٠ \in [-١، ١]$.

$\int_{-١}^{٠} ٤س^{٣}\, ءس = \Big[س^{٤}\Big]_{-١}^{٠} = ٠ - ١ = -١$

$\int_{٠}^{١} ٤س^{٣}\, ءس = \Big[س^{٤}\Big]_{٠}^{١} = ١ - ٠ = ١$.

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} |ق(س)|\, ءس = ١+١ = ٢$ وحدة مربعة .

جـ) $٣س^{٢} - ٤٨ = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٤٨$

$س^{٢} = ١٦$

$س = ٤ ، -٤$

$٤ \in [٣، ٥] ، -٤ \notin [٣، ٥]$

$\int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} - ٤٨)\, ءس = \Big[(س^{٣} - ٤٨س)\Big]_{٣}^{٤}$

$= (٦٤ - ١٩٢) - (٢٧ - ١٤٤)$

$= -١٢٨ + ١١٧ = -١١$

$\int_{٤}^{٥} (٣س^{٢} - ٤٨)\, ءس = \Big[(س^{٣} - ٤٨س)\Big]_{٤}^{٥}$

$= (١٢٥ - ٢٤٠) - (٦٤ - ١٩٢)$

$= -١١٥ + ١٢٨ = ١٣$

المساحة المطلوبة $= \int_{٣}^{٥} |ق(س)|\, ءس = ١١ + ١٣ = ٢٤$ وحدة مربعة .

د) $-\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢} = -٤$

$\Leftarrow$ لا توجد قيم حقيقية تحقق $\text{س}^{٢} = -٤$

$$\int_{-١}^{١} (-\text{س}^{٢} - ٤)\,\text{دس} = \left[\left(\frac{-\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س}\right)\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(\frac{-١}{٣} - ٤\right) - \left(\frac{+١}{٣} - -٤\right)$$

$$= \frac{-١٣}{٣} - \frac{١٣}{٣} = \frac{-٢٦}{٣} \text{ .}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة .

٣- أ) $٤\text{س} - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س}\,(٤ - \text{س}) = ٠$

$\text{س} = ٠ \text{ ، } ٤$

$$\int_{٠}^{٤} (٤\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{دس} = \left[\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right)\right]_{٠}^{٤}$$

$$= \left(٣٢ - \frac{٦٤}{٣}\right) - (٠)$$

$$= \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٤} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة .

ب) $٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow ٤\text{س}^{٢}(\text{س} - ٣) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ٣ \text{ .}$

$$\int_{٠}^{٣} (٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س}^{٢})\,\text{دس} = \left[\left(\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣}\right)\right]_{٠}^{٣}$$

$$= (٨١ - ١٠٨) - (٠)$$

$$= -٢٧$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٣} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = ٢٧$ وحدة مربعة .

٤- $\int_{-٥}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{-٥}^{٠} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \text{م}_{١} + -\text{م}_{٢} = ١٣ + -٣ = ١٠$

م١ تقع فوق محور السينات

م٢ تقع تحت محور السينات .

٥- مساحة النافذة = $\int_{-١}^{١} (٢ - س^{٢}) \, ءس$

$= \left[(٢س - \frac{س^{٣}}{٣}) \right]_{-١}^{١}$

$= (٢ - \frac{١}{٣}) - (-٢ + \frac{١}{٣})$

$= \frac{٥}{٣} - \frac{-٥}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ م^{٢} .

التكلفة الكلية = المساحة × تكلفة المتر المربع

$= \frac{١٠}{٣} \times ٥ = \frac{٥٠}{٣}$ دينارًا .

* * *

الفصل الثالث : الاقترانات اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما .

أولاً : الاقترانات اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي .

تدريب ١ ، ص٢٠٣ :

ص = لوهـ م(س) = ق(س)

نفرض أن ع = م(س)

ص = لوهـ ع ، ع = م(س) .

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{1}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{مَ(س)}$.

حسب قاعدة السلسلة : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

$\text{قَ(س)} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{ع}} \times \text{مَ(س)}$

$\text{قَ(س)} = \frac{\text{مَ(س)}}{\text{م(س)}}$ # .

تدريب ٢ ، ص٢٠٤ :

١) $\text{قَ(س)} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

٢) $\text{قَ(س)} = \frac{\frac{-2}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}}} = \frac{-2}{\text{س}^2} \times \frac{\text{س}}{2} = \frac{-1}{\text{س}}$ ، س > ٠ .

٣) $\text{قَ(س)} = \frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3 + 8}$

تدريب ٣ ، ص٢٠٤ :

$\text{قَ(س)} = \frac{\text{أ}}{\text{أس} + 3}$

$\text{قَ}(-2) = 1 \Leftarrow \frac{\text{أ}}{-2\text{أ} + 3} = 1$

أ = -٢أ + ٣

٣أ = ٣

أ = ١

تدريب ٤ ، ص ٢٠٤ :

١) عندما $\text{س} > ١$ ، $|\text{س}| = \text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

٢) عندما $\text{س} < ١$ ، $|\text{س}| = -\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(-\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١}{-\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$.

∴ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$ ، $\text{س} \neq ٠$.

تدريب ٥ ، ص ٢٠٥ :

١) $\int -٣\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{ء}\text{س} = -٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ج}$.

٢) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢ - ٢$

$\text{ءص} = (٣\text{س}^٢ - ٢)\,\text{ءس}$

$\int ٢(٣\text{س}^٢ - ٢)(\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١)^{-١}\,\text{ءس} = \int ٢\,\text{ص}^{-١}\,\text{ءص}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١| + \text{ج}$.

تدريب ٦ ، ص ٢٠٦ :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص} = \text{هـ}^{\text{ل}(\text{س})}$ ، نفرض أن $\text{ع} = \text{ل}(\text{س})$.

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \text{ل}(\text{س})$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{هـ}^{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{ل}'(\text{س})$.

حسب قاعدة السلسلة : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{ع}} \times \text{ل}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ل}(\text{س})}$. #

- تدريب ٧ ، ص٢٠٧ :

١) $\bar{\text{ص}} = -٢\text{س} \times \text{هـ}^{٣-\text{س}^٢}$.

٢) $\bar{\text{ص}} = -٢\,\text{جا}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}٢\text{س}}$

٣) $\bar{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}}$ حسب قاعدة مشتقة ضرب اقترانين .

٤) $\bar{\text{ص}} = \frac{(\text{س}^٢+١)(٣\text{هـ}^{٣\text{س}}) - (\text{هـ}^{٣\text{س}})(٢\text{س})}{(\text{س}^٢+١)^٢}$

$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}(٣\text{س}^٢+٣-٢\text{س})}{(\text{س}^٢+١)^٢}$ حسب مشتقة قسمة اقترانين .

- تدريب ٨ ، ص٢٠٧ :

$\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} . \text{دس}$ ، نفرضأنه $\text{ص} = \text{أس}+\text{ب}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$

$\text{دص} = \text{أ} . \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} . \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}} . \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$= \frac{١}{\text{أ}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{ج}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

- تدريب ٩ ، ص٢٠٨ :

١) $\int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

٢) $\int \frac{١}{٣}\text{هـ}^{١-٦\text{س}} . \text{دس} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{هـ}^{١-٦\text{س}}}{-٦} + \text{ج}$

$= \frac{-١}{١٨}\text{هـ}^{١-٦\text{س}} + \text{ج}$.

٣) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\text{دص} = (٣\text{س}^{٢} + ٢)\ \text{دس}$$

$$\int (٣\text{س}^{٢}+٢)\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٢\text{س}-١} .\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{ص}} .\ \text{دص}$$

$$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ث}$$

$$= (\text{هـ})^{\text{س}^{٣}+٢\text{س}-١} + \text{ث} .$$

٤) $\int ٦ \times \text{هـ}^{-١+٢\text{س}} .\ \text{دس} = ٦ \times \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}-١}}{٢} + \text{ث}$

$$= ٣\ \text{هـ}^{٢\text{س}-١} + \text{ث} .$$

~ . ~ . ~

الأسئلة ، ص ٢٠٩ :

١- أ) قَ(س) = $\frac{-١}{س^٢}$ + $\frac{١}{س}$ + ١٤ هـ^{٧س} + صفر .

ب) قَ(س) = $\frac{٣}{س}$ + ٤ هـ$^{٣-٢س}$ −٢س .

جـ) قَ(س) = جتا س × هـ$^{جا س}$ −٢ × $\frac{-جا س}{جتا س}$

= جتا س . هـ$^{جا س}$ + $\frac{٢ جا س}{جتا س}$

٢- أ) ٢ هـ^{س} − لو$_{هـ}$|س| + س^{٣} + جـ .

ب) ٢٤ × $\frac{هـ^{١+٢س}}{٢}$ + جـ = ١٢ هـ$^{١+٢س}$ + جـ .

جـ) نفرض أن ص = ١ − س^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = −٢س

دص = −٢س دس

∫ ٢س هـ$^{١-س^٢}$. دس = ∫ − هـ^{ص} . دص

= − هـ^{ص} + جـ

= − هـ$^{١-س^٢}$ + جـ .

د) ٥ لو$_{هـ}$|س| − $\cancel{٣}^{١}$ × $\frac{هـ^{٣س}}{\cancel{٣}_{١}}$ − ٤س + جـ

= ٥ لو$_{هـ}$|س| − هـ^{٣س} − ٤س + جـ .

هـ) نفرض أن ص = س^{٢} + ٤

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س

دص = ٢س دس

∫ $\frac{٨س}{س^٢+٤}$ دس = ∫ $\frac{٤}{ص}$ دص = ٤ لو$_{هـ}$|ص| + جـ

= ٤ لو$_{هـ}$ (س^{٢}+٤) + جـ .

٣- ق(س) = ∫ قَ(س) . د س

= ∫ (٢ $هـ^{س}$ + ٢س) د س

= ٢ $هـ^{س}$ + $س^{٢}$ + ث

(٠، ٤) ⟸ ق(٠) = ٤ ⟸ ٤ = ٢ $هـ^{صفر}$ + صفر + ث

٤ = ٢×١ + ث

ث = ٢

∴ ق(س) = ٢ $هـ^{س}$ + $س^{٢}$ + ٢ .

٤- فَ(ن) = ∫ ع(ن) . د ن   لأن ع(ن) = فَ(ن) .

ف(ن) = ∫ ($هـ^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$) د ن

ف(ن) = $\frac{هـ^{ن+١}}{١}$ + ٨ $لو_{هـ}$ |ن| + ث ، لكن ن > ٠ .

ف(ن) = $هـ^{ن+١}$ + ٨ $لو_{هـ}$ ن + ث ، حيث ث ثابت .

~ . ~ . ~

ثانياً : النمو والاضمحلال :

تدريب ١ ، ص ٢١٢ :

$\text{ص} = \text{ع}(\text{ن}) = \text{ع}_{.} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع}_{.} = ١٠٠٠٠$ ، $\text{م} = ٤\% = \frac{٤}{١٠٠}$ ، $\text{ن} = ٢٥$

$\text{ع}(٢٥) = ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{\frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥}$

$= ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{١}$

$= ١٠٠٠٠ \times ٢٫٧ = ٢٧٠٠٠٫٠$

$= ٢٧٠٠٠$ دينار .

تدريب ٢ ، ص ٢١٢ :

$\text{م} = -٥\% = \frac{-٥}{١٠٠}$

$\text{ن} = ٤٠$

$\text{ع}_{.} = ٨٠٠٠٠$

$\text{ص} = \text{ع}(\text{ن}) = \text{ع}_{.} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع}(٤٠) = ٨٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{\frac{-٥}{١٠٠} \times ٤٠}$

$= ٨٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{-٢}$

$= \frac{٨٠٠٠٠}{\text{هـ}^{٢}} = \frac{٨٠٠٠٠}{(٢٫٧)^{٢}}$

$= \frac{٨٠٠٠٠}{٧٫٢٩}$ ديناراً .

~ . ~ . ~

الأسئلة، ص ٢١٤

١- $\text{م} = \text{٢٠٠٪} = \frac{\text{٢٠٠}}{\text{١٠٠}} = \text{٢}$

$\text{ن} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ساعة .

$\text{ع}_{\text{٠}} = \text{٥٠٠ ٠٠٠}$

$\text{ص} = \text{ع(ن)} = \text{ع}_{\text{٠}} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع}(\frac{\text{١}}{\text{٢}}) = \text{٥٠٠ ٠٠٠} \times \text{هـ}^{\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

$= \text{٥٠٠ ٠٠٠} \times (\text{٢,٧})^{\text{١}} = \text{١٣٥٠ ٠٠٠,٠}$

$= (\text{١ ٣٥٠ ٠٠٠})$ عدد البكتيريا بعد نصف ساعة .

٢- $\text{م} = -\text{٨٪} = \frac{-\text{٨}}{\text{١٠٠}}$ ، $\text{ع}_{\text{٠}} = \text{١٢٥٨٠}$ ، $\text{ن} = \text{٢٥}$

$\text{ع(٢٥)} = \text{١٢٥٨٠} \times (\text{٢,٧})^{\frac{-\text{٨}}{\text{١٠٠}} \times \text{٢٥}} = \text{١٢٥٨٠} \times \text{هـ}^{-\text{٢}}$

$= \frac{\text{١٢٥٨٠}}{(\text{٢,٧})^{\text{٢}}} = \frac{\text{١٢٥٨٠}}{\text{٧,٢٩}}$

$= \frac{\text{١٢٥٨٠}}{\text{٧,٢٩}}$ دينارًا .

٣- $\text{ع}_{\text{٠}} = \text{١٠}$ ، $\text{ع}(\frac{\text{١}}{\text{٤}}) = \text{٥} \Leftarrow \text{ع}(\frac{\text{١}}{\text{٤}}) = \text{ع}_{\text{٠}} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\frac{\text{٥}}{\text{١٠}} = \frac{\text{١٠} \times \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{م}}}{\text{١٠}}$

$\text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{م}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$.

$\text{ن} = \text{١}\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ساعة $= \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

$\text{ع}(\frac{\text{٥}}{\text{٤}}) = \text{ع}_{\text{٠}} \times \text{هـ}^{\text{م ن}} = \text{١٠} \times \text{هـ}^{\text{م} \times \frac{\text{٥}}{\text{٤}}}$

$= \text{١٠} \times (\text{هـ}^{\frac{\text{م}}{\text{٤}}})^{\text{٥}}$

$= \text{١٠} \times (\frac{\text{١}}{\text{٢}})^{\text{٥}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٣٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{١٦}}$ كغ .

٤- $\text{م} = \text{٠,٨٪} = \frac{\text{٨}}{\text{١٠٠٠}}$ ، $\text{ع(٠)} = \text{٦٠٠ ٠٠٠}$ عام ٢٠١٠م .

عام ٢١٣٥ ، $\text{ن} = \text{٢١٣٥} - \text{٢٠١٠} = \text{١٢٥}$

$\text{ع(ن)} = \text{ع}_{\text{٠}} \times \text{هـ}^{\text{م ن}}$

$\text{ع(١٢٥)} = \text{٦٠٠ ٠٠٠} \times (\text{٢,٧})^{\frac{\text{٨}}{\text{١٠٠٠}} \times \text{١٢٥}}$

$= \text{٦٠٠ ٠٠٠} \times (\text{٢,٧})^{\text{١}} = \text{١٦٢٠ ٠٠٠,٠}$ نسمة .

~ . ~ . ~

أسئلة الوحدة ، ص ٢١٥-٢١٧

١- أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٤س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}$

ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} =$ صفرًا لأنّ ص = ثابتًا (تكامل محدود)

جـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ظا} \, (\text{٤} + \text{س})$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} =$ صفرًا .

هـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦}} - \text{٢} \, \text{هـ}^{\text{٢س} - \text{١}} + \text{٣س}^{\text{٢}}$.

و) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جاس} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{جتاس}$.

٢- $\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س} \times \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٤س} \times \text{٤س} \, \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١}} + \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١}} \times \text{٤}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٤} \, \text{هـ}^{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١}} \, (\text{٤س}^{\text{٢}} + \text{١})$

٣- $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \, (\text{٢} - \text{س}^{\text{٢}})$

$\text{ق}'(\text{٢}) = \text{٢} \, (\text{٢} - \text{٤}) = -\text{٤}$

٤- أ) $\int (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٧س}) \times \text{س}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \, \text{د س} = \int (\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} - \text{٧س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}) \, \text{د س}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \text{س}^{\frac{\text{٨}}{\text{٣}}} - \text{٧} \times \frac{\text{٣}}{\text{٥}} \text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٨}}} - \frac{\text{٢١}}{\text{٥}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٥}}} + \text{جـ}$.

ب) $\int \text{٦س}^{\text{٥}} \, \text{د س} = \text{س}^{\text{٦}} + \text{جـ}$.

جـ) $\int (س^{٢} - ٤)\, د س = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ س + ث$.

د) $\frac{(٣ س + ٢)^{٣}}{٣ \times ٣} + ث = \frac{(٣ س + ٢)^{٣}}{٩} + ث$.

هـ) نفرض أن $ص = س^{٢} - س$

$\frac{د ص}{د س} = ٢ س - ١$

$د ص = (٢ س - ١)\, د س$

$\int (٢ س - ١)\, ص^{٥}\, د س = \int ص^{٥}\, د ص$

$= \frac{ص^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{(س^{٢} - س)^{٦}}{٦} + ث$.

و) نفرض أن $ص = س^{٣} + ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢}$

$د ص = ٣ س^{٢}\, د ص$

$\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{-\frac{١}{٢}}\, د س = \int ص^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{د ص}{٣}$

$= \frac{١}{٣} \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣} + ١} + ث$.

ز) $٢ لو_{هـ} |س| - هـ^{س} + ٣ س + ث$.

ح) نفرض أن $ص = س^{٤} + ٣$

$\frac{د ص}{د س} = ٤ س^{٣}$

$د ص = ٤ س^{٣}\, د س$

$\int \frac{١٢ س^{٣}}{س^{٤} + ٣}\, د س = \int \frac{٣\, د ص}{ص} = ٣ لو_{هـ} |ص| + ث$

$= ٣ لو_{هـ} |س^{٤} + ٣| + ث$

$= ٣ لو_{هـ} (س^{٤} + ٣) + ث$.

ط) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٥$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دص} = ٢\text{س}\ \text{دس}$

$\int ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^٢+٥} .\ \text{دس} = \int ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ح}$

$= ٣\ \text{هـ}^{\text{س}^٢+٥} + \text{ح}$.

ي) نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٢ + \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ١$

$\text{دص} = (٢\text{س}+١)\ \text{دس}$

$\int \frac{٢\text{س}+١}{\text{جتا}^٢(\text{س}^٢+\text{س})}\ \text{دس} = \int \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{ص}} \times \text{دص}$

$= \int \text{قا}^٢\text{ص} .\ \text{دص} = \text{ظاص} + \text{ح}$

$= \text{ظا}\ (\text{س}^٢+\text{س}) + \text{ح}$.

٥- أ) $\int_{-١}^{-٨} \text{س}^{\frac{-١}{٣}}\ \text{دس} = \frac{٣}{٢}\ \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \Big]_{-١}^{-٨} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-٨)^٢} - \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(-١)^٢}$

$= \frac{٣\times٤}{٢} - \frac{٣\times١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ب) $\text{هـ}\ \text{س} \Big]_{١}^{٤} = ٤\text{هـ} - ١\text{هـ} = ٣\text{هـ}$.

هـ) $\int_{٤}^{١} (\text{س}^{\frac{-١}{٢}} - \text{س}^{-٢})\ \text{دس} = (٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \frac{\text{س}^{-١}}{-١}) \Big]_{٤}^{١}$

$= ٢\sqrt{\text{س}} \Big]_{٤}^{١} + \frac{١}{\text{س}} \Big]_{٤}^{١}$

$= (٢-٤) + (\frac{١}{١} - \frac{١}{٤})$

$= -٢ + ١ - \frac{١}{٤} = \frac{-٥}{٤}$.

د) $\int_{-١}^{١} \frac{\cancel{(س+٤)}(س+٣)}{\cancel{س+٤}} \, ءس$

$= \left[\left(\frac{س^٢}{٢} + ٣س\right)\right]_{-١}^{١} = \left(\cancel{\frac{١}{٢}} + ٣\right) - \left(\cancel{\frac{١}{٢}} + -٣\right)$

$= ٦$

هـ) $\int \frac{٢}{٢س+١} \, ءس$ ، نفرض أن ص = ٢س + ١

$\frac{ءص}{ءس} = ٢$

$ءص = ٢ \, ءس$

$\int \frac{٢}{٢س+١} \, ءس = \int \frac{١}{ص} \, ءص = لو_{هـ}|ص| + ث$.

$= لو_{هـ}|٢س+١| + ث$.

$\int_{٣}^{٠} \frac{٢ءس}{٢س+١} = \left[لو_{هـ}|٢س+١|\right]_{٣}^{٠} = لو_{هـ}|١| - لو_{هـ}|٧|$

$= صفر - لو_{هـ}٧$

$= - لو_{هـ}٧$.

و) $\int ٤س \, . \, هـ^{س^٢} . \, ءس$ ، نفرض أن $ص = س^٢$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$ءص = ٢س \, ءس$

$\int ٤س \, . \, هـ^{س^٢} . \, ءس = \int ٢ هـ^{ص} \, ءص$

$= ٢ هـ^{ص} + ث = ٢ هـ^{س^٢} + ث$.

$\int_{١}^{٠} ٤س \, . \, هـ^{س^٢} . \, ءس = \left[٢ هـ^{س^٢}\right]_{١}^{٠} = ٢هـ^{٠} - ٢هـ^{١} = ٢ - ٢هـ$.

ن) $\int_{٢}^{٦} ١٠(٥س+٦)^{-\frac{١}{٢}} \, ءس = \left[\cancel{١٠}^{٢} \times \frac{(٥س+٦)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times \cancel{٥}}\right]_{٢}^{٦}$

$= \left[٤\sqrt{٥س+٦}\right]_{٢}^{٦} = ٤\sqrt{٣٦} - ٤\sqrt{١٦}$

$= ٢٤ - ١٦$

$= ٨$.

٦- $-ن+٣ = ن^{٢}+ن$

$ن^{٢}+٢ن-٣=٠ \Rightarrow (ن+٣)(ن-١)=٠$

$ن=-٣$ ، $ن=١$

٧- $\int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس + \int_{-١}^{٥} ٣\,ءس = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس + \left([٣س]_{-١}^{٥}\right) = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس + (١٥+٣) = ٢٠ \Rightarrow \int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس = ٢$

أ) $\int_{٥}^{-١} ق(س)\,ءس = -\int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس = -٢$

ب) $\int_{-١}^{١} ق(س)\,ءس = \int_{-١}^{٥} ق(س)\,ءس + \int_{٥}^{١} ق(س)\,ءس$

$= ٢ + -٤ = -٢$

جـ) $\int_{٥}^{١} (٣ق(س))\,ءس - [٢س^{٢}]_{٥}^{١}$

$٣\times -٤ - (٢-٥٠) = -١٢+٤٨ = ٣٦$.

٨- أ) $[٢نس]_{-١}^{٣} = ١٢ \Rightarrow ٦ن+٢ن = ١٢$

$٨ن = ١٢$

$ن = \frac{١٢}{٨} \Rightarrow ن = \frac{٣}{٢}$

ب) $[(س^{٢}-س)]_{٤}^{ن} = ٠ \Rightarrow (ن^{٢}-ن)-(١٦-٤) = ٠$

$ن^{٢}-ن-١٢ = ٠ \Rightarrow (ن-٤)(ن+٣) = ٠$

$ن=٤$ ، $ن=-٣$

ح) $\left[\left(\frac{ب س^{٣}}{٣} + ٢س\right)\right]_{٠}^{٣} = -٢١$

$(٩ب + ٦) - (٠) = -٢١ \Leftarrow ٩ب = -٢٧$

$ب = -٣$

د) $\left[\left(س - ٢س^{٢}\right)\right]_{٢}^{ب} = ٥ب \Leftarrow (ب - ٢ب^{٢}) - (٢ - ٨) = ٥ب$

$ب - ٢ب^{٢} + ٦ - ٥ب = ٠$

$٢ب^{٢} + ٤ب - ٦ = ٠$

$ب^{٢} + ٢ب - ٣ = ٠ \Leftarrow (ب + ٣)(ب - ١) = ٠$

$ب = -٣$ ، $ب = ١$

٩- $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٥س + ٢$

$ق(س) = \int ق'(س)\, ءس = \int (٣س^{٢} + ٥س + ٢)\, ءس$

$= س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٢س + جـ$.

$(٢، -١) \Leftarrow ق(٢) = -١ \Leftarrow -١ = ٨ + ١٠ + ٤ + جـ$

$-٢٣ = جـ$

$\therefore ق(س) = س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٢س - ٢٣$.

١٠- $٣س^{٢} - ٢٧ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = -٣ ، ٣$

$-٣ \in [-٤، ٠]$

$٣ \notin [-٤، ٠]$

$\int_{-٤}^{-٣} (٣س^{٢} - ٢٧)\, ءس = \left[(س^{٣} - ٢٧س)\right]_{-٤}^{-٣}$

$= (-٢٧ + ٨١) - (-٦٤ + ١٠٨)$

$= ٥٤ - ٤٤ = ١٠$

$\int_{-٣}^{٠} (٣س^{٢} - ٢٧)\, ءس = \left[(س^{٣} - ٢٧س)\right]_{-٣}^{٠} = ٠ - (-٢٧ + ٨١)$

$= -٥٤$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٤}^{٠} |ق(س)|\, ءس = ١٠ + ٥٤ = ٦٤$ وحدة مربعة .

١١- $ت(ن) = ١٢ن - ١٢ن^{٢}$.

أ) $ع(ن) = \int ت(ن) . دن = \int (١٢ن - ١٢ن^{٢}) \, دن$

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ث_{١}$

لكن $ع(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ث_{١}$

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣$.

$ع(٤) = ٦ \times ١٦ - ٤ \times ٦٤ + ٣$

$= ٩٦ - ٢٥٦ + ٣ = - ١٥٧$ م/ث .

ب) $ف(ن) = \int ع(ن) . دن = \int (٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣) \, دن$

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + ث_{٢}$.

$ف(٠) = ٢ \Leftarrow ٢ = ث_{٢}$

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + ٢$

$ف(٢) = ٢ \times ٨ - ١٦ + ٦ + ٢ = ٨$ م .

١٢- $أ = ٢,٥\% = \frac{٢٥}{١٠٠٠}$

$ع_{٠} = ٣٠٠٠$

$ن = ٨٠$

$ص = ع(ن) = ع_{٠} \times هـ^{أن}$

$ع(٨٠) = ٣٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{٢٥}{١٠٠٠} \times ٨٠}$

$= ٣٠٠٠ \times (٢,٧)^{١} = ٨١٠٠,٠٠$

$=$ ٨١٠٠ دينار .

~ . ~ . ~

حل أسئلة الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات) الفرع الأدبي

الفصل الأول: طرائق العد

أولا: مبدأ العد

تدريب١: عدد الخيارات = ٨

تدريب٢: عدد الخيارات = ٢٤ وبذلك لن تكفيه الخيارات لمدة شهر

تدريب٣: أ) ٢٧ طريقة ب) ٦ طرق

تدريب٤: ٦!

تدريب٥: ١) ن=٥ ٢) ن=٢ ٣) ن=٢ ٤) ن=٥

س١: عدد الطرق=١٠×٣٠×٩×٢٩ طريقة

س٢: عدد الطرق=٢٤ طريقة

س٣: عدد الطرق = ٩×٩×٩×٢٨×٢٧ طريقة

س٤: أ) ٧٢٠ ب) ١٢٨ جـ)٣ د)٢٥٢

س٥: أ) ن=٤ ب) ن= ٥ ج) (٣ن – ١)! =٢ ومنه ن=١

ثانيا: التباديل

تدريب١: ١) ل(٥ ، ٢) = ٢٠ ٢) ٦×٥×٤×٣ + ٧×٦×٥×٤×٣ + ٢

تدريب٢: ل(٢٠ ، ٣) = ٢٠×١٩ ×١٨

تدريب٣: ١) ١٦٨٠= ٨×٧×٦×٥ عدد الاعداد ٤ ، ومنه ر=٤

٢) بحل المعادلة ينتج ل(٤ ، ر) = ٢٤ ومنه ٢٤=٤×٣×٢ إذن ر=٣ أو ٢٤=٤×٣×٢×١ ومنه ر=٤

س١: ل(٩ ، ٥) = ٩×٨×٧×٦×٥

س٢: ل(٩ ، ٣) = ٩×٨×٧ = ٥٠٤ طريقة

س٣: أ) ٨×٧×٦ ب) ١٣×١٢×١١×١٠×٩×٨×٧×٦×٥×٤ جـ) ٢٠×١٩×١٨ د) ١

س٤: أ) ل(١٧ ، ٥) ب) ل(ك ، ٣)

س٥: أ) ن= ١٠ (ابحث عن ٣ أعداد متتالية حاصل ضربها ٧٢٠)

ب) ر=٤ (لان ٣٦٠ =٦×٥×٤×٣ ، عدد الأعداد ٤)

جـ) ن(ن-١)(ن-٢) = ٩ ن(ن-١) ومنه ن-٢=٩ ومنه ن=١١

س٦: عدد الكلمات = ل(٥ ، ٣) = ٥×٤×٣

ثالثا: التوافيق

تدريب١: ١) ٣٦ ٢) ٥٦ ٣) ١٠

تدريب٢: ١) الفريق الطبي من طبيبين على الأكثر = طبيبين و٣ممرضين + طبيب و٤ ممرضين+ ٥ممرضين

= ٢٠٠ + ٧٥ + ٦

٢) عدد الطرق = ٥×٤×(توافيق ٦ ، ٣) = ٥×٤× ٢٠ = ٤٠٠ طريقة

تدريب٣: ١) س=٣ أو س=١ ٢) س= ٥+٧=١٢

س١: أ) (١٠٠×٩٩×٩٨)÷(٣×٢) ب) ١ جـ) ١ د)٤

س٢: عدد الطرق= ٤٥ طريقة

س٣: أ) ٣×٥ + ١ = ١٦ طريقة ب) ١٠ طرق جـ) ٣×(توافيق ٧، ٢) = ٦٣ طريقة

س٤: أ) ٢س=١ ومنه س=٠,٥ أو ٢س=٢ ومنه س=١

ب) س= ٥+٢١ = ٢٦

الفصل الثاني:

أولا: المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

تدريب١: ١) ع = ٠ ، ١، ٢

٢)

ع	٠	١	٢
ل(ع)	٤/١	٤/٢	٤/١

٣) بما أن ٤/١ + ٢/ ٤ + ٤/١ =١ فإن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

تدريب٢: قيمة ٢ب = ١- ٠,٦ ومنه ب=٠,٢

تدريب٣: ١) ٦×$(٠,٧)^{٥}$×(٠,٣)

٢) ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل(س=٦) = ١٥×$(٠,٧)^{٤}$×$(٠,٣)^{٢}$ + ٦×$(٠,٧)^{٥}$×(٠,٣) + ١×$(٠,٧)^{٦}$

٣) ل(س=٢) + ل(س=١) +ل(س=٠) = ١٥×$(٠,٧)^{٢}$×$(٠,٣)^{٤}$ + ٦×(٠,٧) ×$(٠,٣)^{٥}$ + ١×$(٠,٣)^{٦}$

تدريب٤:

ل(س ≤ ٣) = ل(س=٣)+ ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل(س=٦) + ل(س=٧) علما أن ن=٧ ر=٠،٦ ١- ر= ٠,٤

ويمكن حل السؤال بطريقة اخرى

ل(نجاح غرس ٣ شتلات على الأقل) = ١ – ل(س ≤ ٢)

س١: أ) س= ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

ب)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	٣٦/١	٣٦/٢	٣٦ /٣	٣٦/٤	٣٦/٥	٣٦/٦	٣٦/٥	٣٦/٤	٣٦/٣	٣٦/٢	٣٦/١

جـ) بما أن مجموع ل(س) =١ فهو اقتران احتمال.

س٢: قيمة أ = - ٠,٦

س٣: أ) ل(س=٢) = ٦×(٠,٦)^{٢}×(٠,٤)^{٢}

ب) ل(س=٤) = ١×(٠,٦)^{٤}×(٠,٤)^{٠} = (٠,٦)^{٤}

جـ) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س=٠) = ٤×(٠,٦)^{١}×(٠,٤)^{٣} + ١×(٠,٤)^{٤}

س٤: بما أن السحب مع الارجاع فالتجربة تتبع تورزيع ذي الحدين

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	٤٠٩٦ /٦٢٥	٤٠٩٦ /١٥٠٠	٤٠٩٦ /١٣٥٠	٤٠٩٦ /٥٤٠	٤٠٩٦ /٨١

حيث ن= ٤ ، أ = ٨/٣ (احتمال الكرة المسحوبة حمراء)

ل(س=٠) = ١×(٨/٣)^{٠}×(٨/٥)^{٤} = ٤٠٩٦ /٦٢٥

ل(س=١) = ٤×(٨/٣)^{١}×(٨/٥)^{٣}= ٤٠٩٦ /١٥٠٠

ثانيا: العلامة المعيارية

تدريب١: العلامة المعيارية لكتلة الطالب = - ٠,٥

تدريب٢: المتوسط الحسابي = ٦٨

تدريب٣: المتوسط الحسابي = ٨٠ ، والنحراف المعياري = ٤

س١: العلامة المعيارية للطالب ساهر=٤ ، والعلامة المعيارية للطالب مهند = -٢

س٢: أ) ١٧٢ سم ب) ١٥١ سم

س٣: المتوسط الحسابي = ٤

س٤: المتوسط الحسابي = ٢٢ ، الانحراف المعياري= ٣/١٠

ثالثا: التوزيع الطبيعي

تدريب١: ١) ٠,٩٩١٨ ٢) ٠,٩٩٧٨ ٣) ٠,١٢٧١ ٤) ٠,٨٥١١

تدريب٢: ١) ٠,٩٤٥٢ ٢) ٠,٥٦٧٠

تدريب٣: ل(س ≤ ٦٠) = ل(ز≤ -١) = ٠,٨٤١٣ = نسبة النجاح ، ومنه عدد الناجحين ٨٤١٣ طالب

س١: أ) ٠,٨٨٤٩ ب) ٠,٩٩٦٢ جـ) ٠,٨٩٨٠ د) ٠,٠١٦٢ هـ) ٠,٧٤١٤

س٢: أ) ٠,٢١١٩ ب) ٠,٠٥٤٨

س٣: أ) ل(س ≥٥٢) = ٠,٠٦٦٨

ب) ل(٥٠ ≥ س ≥ ٦٠) = ٠,٩٥٩٦

جـ) ل(س ≤ ٥٦) = ل(ز≤ ٠,٥) = ٠,٣٠٨٥ = نسبة الطالبات التي تزيد كتلهن على ٥٦ كغ

ومنه عددهن ٠,٣٠٨٥ × ١٠٠٠ =٣٠٨ طالبة تقريبا.

س٤: ل(س≥ ٦٥) = ٠,٣٠٨٥

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار

أولا: الارتباط

تدريب٢: ر = -٠,٤٥

تدريب٣: ر= ٠,٣٣٣٣ علاقة طردية ضعيفة

تدريب٤: ١) ر=٠,٦٥ ٢) ر= ٠,٦٥ ٣) ر= -٠,٦٥

س٢: ر= - ٠,٠٢٩

س٣: ر= - ٠,١٦

س٤: ر= - ٠,٠٨ علاقة عكسية ضعيفة

س٥: - ٠,٩ هي العلاقة الأقوى (عكسية أقوى)

س٦: أ) ر= ٠,٨٥ ب) ر= ٠,٨٥ جـ) ر= - ٠,٨٥

ثانيا: خط الانحدار

تدريب١: ١) ص^ = ١,٤ س -٣٥

٢) عندما س= ٨٨، علامة الطالب المتوقعة في الجامعة = ص^ = ٨٨,٢

٣) عندما س= ٧٠، العلامة المتنبأ بها = ص^ = ٦٣ ، ومنه الخطأ في التنبؤ = ٦٠ – ٦٣ = -٣

تدريب٢: ١) ص^ =٧ أخطاء

٢) عدد الاخطاء المتوقعة لشخص عمل ١٥ ساعة = ص^ = ١٠ أخطاء، ومنه الخطأ في التنبؤ = ٦-١٠= -٤

س١: أ) ص^ = ٠,٣٢ س + ٤٥,٦

ب) معدل الطالب المتوقع في الصف العاشر = ص^ =٧٣,٧٦

جـ) عندما س= ٩٠ ، ص= ٨٠ ، ص^ = ٧٤,٤ ومنه الخطأ في التنبؤ=٨٠- ٧٤,٤ = ٥,٦

س٢: ص^ = ٢س+١٥

س٣: ص^ = ١٨٠١٠ دينار، الخطأ في التنبؤ= ٢٧٤٠٠ – ١٨٠١٠ = ٩٣٩٠ دينار

أسئلة الوحدة:

س١: عدد الطرق = ل(٥، ٤) × ل(١٠، ٣) = ٨٦٤٠٠ طريقة (الترتيب مهم، لذا تباديل)

س٢: ر= ٣

س٣:

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٣٦	٠,٤٨	٠,١٦

س٤: س = ٣٤

س٥: ب= ٠,١

س٦: أ) ر= - ٠,٨ ب) ر= - ٠,٨

س٧: أ) ص^ = ١,١ س + ٣,٧ ب) ١٩,١ جـ) – ١,١

س٨: أ) ٠,٩٥٥٤ ب) ٠,٩٨٤٢ جـ) ٠,٨٧٢٩

د) ٠,٠٠٦٢ هـ) ٠,٧٧٠٩

س٩: أ) ل(ز ≤ -١) = ٠,١٥٨٧

ب) ل(ز ≥ ٠,٦) = ٠ .٢٧٤٣

س١٠: أ) ل(س≤ ٧٥) = ٠,١٥٨٧

ب) ل(٧٠ ≤ س≤ ٩٠) = ٠,٩٥٤٤

جـ) نسبة الطالبات اللواتي يزيد معدل كل منهن عن ٧٠= ل(س≥ ٧٠) = ٠,٩٧٧٢

وبذلك عددهن يساوي ٠,٩٧٧٢ × ١٠٠٠ = ٩٧٧ طالبة تقريبا.